

Bieg po Indeks – edycja XXVIII

Etap I

Matematyka – zestaw 3

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a , dla których rozwiązania nierówności $x^2 + (a-5)x - 2a^2 + 2a + 4 \leq 0$ tworzą przedział o długości większej niż 6.

Szkic rozwiązania:

Zauważmy, że wyróżnik tego równania jest równy:

$$\Delta = (a-5)^2 - 4(-2a^2 + 2a + 4) = 9a^2 - 18a + 9 = 9(a-1)^2.$$
$$\sqrt{\Delta} = 3|a-1|.$$

Pierwiastkami równania są liczby:

$$x_{1,2} = \frac{-(a-5) \pm 3|a-1|}{2} = \frac{-(a-5) \pm 3(a-1)}{2},$$

czyli

$$x_1 = \frac{-a+5+3a-3}{2} = a+1, \quad x_2 = \frac{-a+5-3a+3}{2} = 4-2a.$$

W zależności od tego, który z pierwiastków jest większy, zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział: $\langle a+1; 4-2a \rangle$ lub przedział $\langle 4-2a; a+1 \rangle$ (lub punkt, jeżeli pierwiastek jest podwójny).

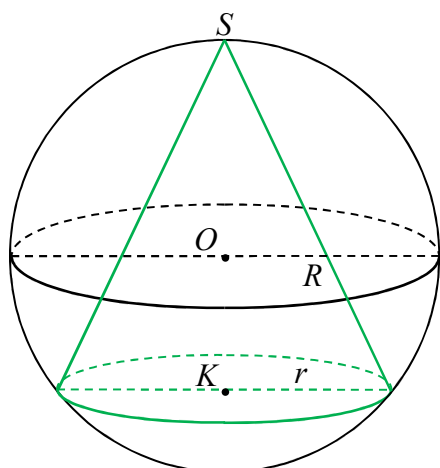
Długość przedziału (niezależnie od sytuacji) jest równa: $|x_1 - x_2| = |(a+1) - (4-2a)| = |3a-3|$.

Przypadek $|x_1 - x_2| > 6$ zachodzi wówczas, gdy $a < -1$ lub $a > 3$.

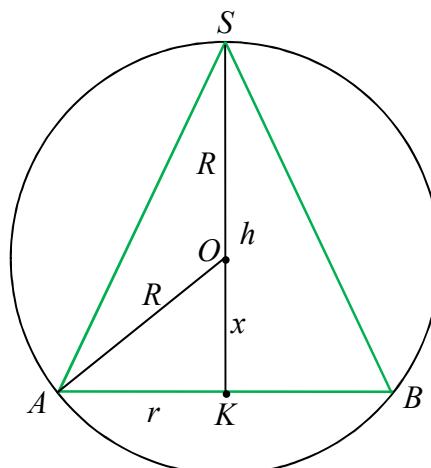
Zadanie 2. W kulę o promieniu R wpisano stożek, którego wysokość jest równa średnicy podstawy. Obliczyć stosunek objętości kuli do objętości stożka.

Szkic rozwiązania:

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunkach. Na rysunku 1 mamy daną kulę i wpisany w nią stożek, a na rysunku 2 przekrój tych brył płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli i wierzchołek stożka.



Rys. 1



Rys. 2

Z treści zadania wiemy, że wysokość stożka h jest równa średnicy jego podstawy, zatem $h = 2r$. Dodatkowo, jeżeli przez x oznaczmy odległość środka kuli od środka podstawy stożka, to $h = x + R$. Więć $x + R = 2r$, a stąd $x = 2r - R$.

Stosując tw. Pitagorasa do trójkąta AKO , możemy zapisać:

$$R^2 = r^2 + x^2, \text{ i dalej } R^2 = r^2 + (2r - R)^2.$$

Jak łatwo się przekonać, ostatnia równość zachodzi dla $r = 0$ (odrzucaamy) lub $r = \frac{4}{5}R$.

Zapisujemy wzór na objętość kuli:

$$V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$$

oraz objętość stożka:

$$V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Z ostatniej równości oraz wcześniej podanych zależności mamy:

$$V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{4}{5}R\right)^3 = \frac{128}{375}\pi R^3.$$

Ostatecznie stosunek objętości kuli do objętości stożka wynosi:

$$\frac{V_k}{V_s} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{128}{375}\pi R^3} = \frac{125}{32}.$$

Zadanie 3. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, którego wszystkie wierzchołki leżą na paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$ wiedząc, że jeden z wierzchołków trójkąta znajduje się w wierzchołku paraboli, a wierzchołek przy kącie prostym leży w punkcie styczności danej paraboli z prostą równoległą do prostej $y = 2x - 5$.

Szkic rozwiązania:

Znajdujemy kolejne wierzchołki trójkąta. Wierzchołek A jest jednocześnie wierzchołkiem danej paraboli. Zapisując jej równanie w postaci

$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ stwierdzamy, że wierzchołek ten znajduje się w punkcie $A(1, 2)$.

Wierzchołek B jest punktem styczności danej paraboli z prostą o równaniu $y = 2x + k$.

Zatem układ równań:

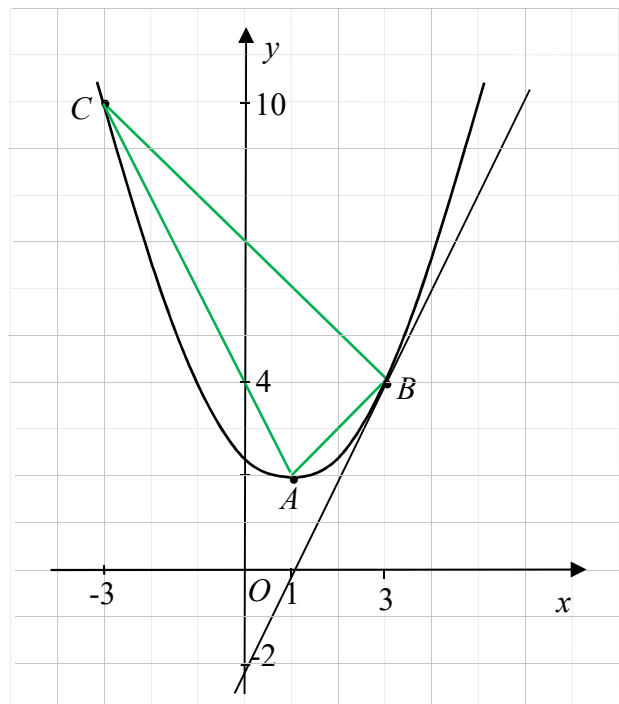
$$\begin{cases} y = 2x + k \\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie.

Przyrównując prawe strony powyższych równości otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} = 2x + k, \text{ a po przekształceniach}$$

$x^2 - 6x + 5 - 2k = 0$. Wyróżnik tego równania $\Delta = 36 - 4(5 - 2k) = 16 + 8k$ przyrównujemy do



zera i otrzymujemy $k = -2$. Stąd po rozwiązaniu powyższego układu równań wyznaczamy $B(3,4)$.

Wierzchołek C wyznaczmy, jako drugi z punktów wspólnych (pierwszym jest punkt B) danej paraboli oraz prostej l_{BC} prostopadłej do prostej l_{AB} i przechodzącej przez dany punkt B . Łatwo stwierdzić, że prosta l_{AB} ma równanie $y = x + 1$, a zatem prostą l_{BC} poszukujemy w postaci $y = -x + n$. Współczynnik n wyznaczamy podstawiając do równania tej prostej współrzędne punktu B . Otrzymujemy $n = 7$, a stąd $l_{BC}: y = -x + 7$. Rozwiązując odpowiedni układ równań otrzymujemy ostatni z wierzchołków trójkąta: $C(-3,10)$. Stosując odpowiedni wzór obliczamy jeszcze długości odcinków AB i BC : $|AB| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2}$. Ostatecznie

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12.$$

Zadanie 4. Suma trzech początkowych wyrazów zbieżnego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich jest równa $\frac{13}{15}$, natomiast suma ich odwrotności wynosi $\frac{65}{3}$. Obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Szkic rozwiązania:

Przez a_1 oznaczmy pierwszy wyraz naszego ciągu geometrycznego, natomiast przez q jego iloraz. Możemy wówczas zapisać:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{13}{15} & (1) \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1q} + \frac{1}{a_1q^2} = \frac{65}{3} & (2) \end{cases}.$$

Przekształcając drugą równość otrzymujemy:

$$\frac{q^2 + q + 1}{a_1q^2} = \frac{65}{3}, \text{ a stąd } \frac{a_1(q^2 + q + 1)}{a_1^2q^2} = \frac{65}{3}.$$

Wykorzystując warunek (1) możemy dalej zapisać:

$$\frac{\frac{13}{15}}{(a_1q)^2} = \frac{65}{3}, \text{ skąd po przekształceniach otrzymujemy } (a_1q)^2 = \frac{1}{25}.$$

Ponieważ szukany ciąg ma mieć wyrazy dodatnie, zatem $a_1q = \frac{1}{5}$.

Podstawiając $a_1 = \frac{1}{5q}$ do równości (1) otrzymamy:

$$\frac{1}{5q} + \frac{1}{5} + \frac{q}{5} = \frac{13}{15}, \text{ a stąd } 3q^2 - 10q + 3 = 0.$$

Rozwiązaniami ostatniego równania są: $q = \frac{1}{3}$, $q = 3$. Drugie rozwiązanie odrzucamy ponieważ szukany ciąg ma być zbieżny. Ciągiem spełniającym warunki zadania jest zatem ciąg dla którego: $a_1 = \frac{3}{5}$, $q = \frac{1}{3}$.

Ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$ obliczamy sumę wszystkich wyrazów naszego ciągu: $S = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{10}$.

Zadanie 5. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 2n+5\}$ losujemy trzy liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ich suma jest liczbą parzystą.

Szkic rozwiązania:

Niech A oznacza zdarzenie: „suma wylosowanych trzech liczb jest liczbą parzystą”.

Zdarzenie to można przedstawić w postaci sumy dwóch wykluczających się zdarzeń:

A_1 - wszystkie trzy wylosowane liczby są parzyste, A_2 - jedna wylosowana liczba jest parzysta, dwie – nieparzyste.

Ponieważ w podanym zbiorze liczb parzystych jest $n+2$, a nieparzystych jest $n+3$, to

$$P(A_1) = \frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{2n+5}{3}} = \frac{\frac{(n+2)!}{3! \cdot (n-1)!}}{\frac{(2n+5)!}{3! \cdot (2n+2)!}} = \frac{(n-1)! \cdot (n+1)(n+2)}{3! \cdot (n-1)!} \cdot \frac{3! \cdot (2n+2)!}{(2n+2)! \cdot (2n+3)(2n+4)(2n+5)}$$

Po skróceniu wyrazów podobnych otrzymamy:

$$P(A_1) = \frac{n(n+1)}{2(2n+3)(2n+5)}.$$

Podobnie

$$P(A_2) = \frac{\binom{n+2}{1} \binom{n+3}{2}}{\binom{2n+5}{3}} = \frac{(n+2) \frac{(n+3)!}{2! \cdot (n+1)!}}{\frac{(2n+5)!}{3! \cdot (2n+2)!}} = \frac{(n+2)(n+1)! \cdot (n+2)(n+3)}{2! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{3! \cdot (2n+2)!}{(2n+2)! \cdot (2n+3)(2n+4)(2n+5)}$$

Po skróceniu wyrazów podobnych otrzymamy:

$$P(A_2) = \frac{3(n+2)(n+3)}{2(2n+3)(2n+5)}.$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{n(n+1)}{2(2n+3)(2n+5)} + \frac{3(n+2)(n+3)}{2(2n+3)(2n+5)} = \frac{4n^2 + 16n + 18}{2(2n+3)(2n+5)}.$$