

# Bieg po Indeks – edycja XXVIII

## Etap I

### Matematyka – zestaw 1 z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Rozwiązać nierówność:

$$|x^2 - 2x - 3| < |x^2 - x + 4|.$$

**Szkic rozwiązania:**

Zauważmy, że trójmian występujący po prawej stronie nierówności przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. Oznacza to, że dana nierówność jest równoważna nierówności:

$$|x^2 - 2x - 3| < x^2 - x + 4.$$

Aby ta nierówność była spełniona, muszą jednocześnie zachodzić warunki:

$$1^\circ. -(x^2 - x + 4) < x^2 - 2x - 3 \quad \text{oraz} \quad 2^\circ. x^2 - 2x - 3 < x^2 - x + 4.$$

Stąd otrzymujemy:

$$1^\circ. -2x^2 + 3x - 1 < 0 \quad \text{oraz} \quad 2^\circ. -x < 7.$$

Zbiorem rozwiązań warunku 1° jest suma przedziałów:  $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$ , natomiast zbiorem rozwiązań warunku 2° jest przedział:  $(-7; +\infty)$ . Ostatecznie zbiorem rozwiązań nierówności jest suma przedziałów:  $(-7; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$ .

**Zadanie 2.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite  $k$ , dla których wyrażenie:  $\frac{2k^2 + k - 8}{k - 1}$  jest liczbą całkowitą.

**Szkic rozwiązania:**

Wykorzystując dzielenie wielomianów wyrażenie to możemy zapisać w postaci:

$$\frac{2k^2 + k - 8}{k - 1} = 2k + 3 - \frac{5}{k - 1}.$$

Z otrzymanego zapisu wynika, że wyrażenie to przy całkowitym  $k$  będzie całkowite, jeżeli wartością ułamka  $\frac{5}{k - 1}$  będzie liczba całkowita.

Aby warunek ten był spełniony liczba  $k - 1$  musi być dzielnikiem liczby 5.

Możliwe są więc przypadki:

$$1^\circ. k - 1 = 1 \quad \text{lub} \quad 2^\circ. k - 1 = 5 \quad \text{lub} \quad 3^\circ. k - 1 = -1 \quad \text{lub} \quad 4^\circ. k - 1 = -5.$$

Stąd  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 6$ ,  $k_3 = 0$ ,  $k_4 = -4$ .

**Zadanie 3.** Rozwiązać równanie:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120.$$

**Szkic rozwiązania:**

Zapiszmy to równanie kolejno w postaci:

$$(x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) = 120,$$

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 120.$$

Przyjmując  $x^2 + 5x + 4 = y$  otrzymamy  $y(y + 2) = 120$ .

Otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki:  $y_1 = 10$ ,  $y_2 = -12$ .

Zatem

$$1^\circ. x^2 + 5x + 4 = 10 \quad \text{lub} \quad 2^\circ. x^2 + 5x + 4 = -12.$$

Pierwsze równanie ma dwa pierwiastki:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -6$ . Drugie równanie pierwiastków nie posiada.

Ostatecznie:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -6$ .

**Zadanie 4.** Obliczyć sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, dla którego  $a_1 = 3$  oraz  $a_9 - a_5 = 36$ .

**Szkic rozwiązania:**

Oznaczmy przez  $q$  iloraz danego ciągu. Ponieważ  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , to z podanego warunku wynika, że  $3q^8 - 3q^4 = 36$ , a tym samym  $q^8 - q^4 = 12$ .

Rozwiązując to równanie przez podstawienie  $q^4 = t$ , otrzymamy  $t^2 - t - 12 = 0$ . Pierwiastkiem równania spełniającym warunki zadania jest  $t = 4$ , co oznacza, że  $q^4 = 4$ , a w konsekwencji  $q_1 = \sqrt{2}$  oraz  $q_2 = -\sqrt{2}$ .

Szukana suma ma postać:  $S_{10} = a_1 \frac{1 - q^{10}}{1 - q}$ .

Dla ciągu geometrycznego, w którym  $a_1 = 3$  oraz  $q = \sqrt{2}$  mamy:

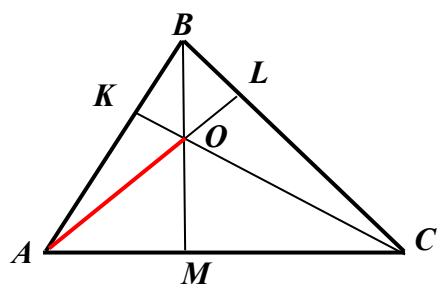
$$S_{10} = 3 \frac{1 - (\sqrt{2})^{10}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{3(1 - 32)}{1 - \sqrt{2}} = 93(1 + \sqrt{2}),$$

a dla ciągu geometrycznego, w którym  $a_1 = 3$  oraz  $q = -\sqrt{2}$ :

$$S_{10} = 3 \frac{1 - (-\sqrt{2})^{10}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{3(1 - 32)}{1 + \sqrt{2}} = 93(1 - \sqrt{2}).$$

**Zadanie 5.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , którego boki mają długości odpowiednio:  $AB = 13$ ,  $BC = 14$ ,  $AC = 15$ . Obliczyć odległość punktu przecięcia się wysokości tego trójkąta od wierzchołka  $A$ .

**Szkic rozwiązania:**



Przyjmując oznaczenia jak na rysunku mamy:

$$AL = \frac{2S}{BC}, \quad CK = \frac{2S}{AB}, \quad \text{gdzie } S \text{ oznacza pole trójkąta.}$$

Na podstawie wzoru Herona otrzymujemy:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

$$\text{Stąd } AL = \frac{168}{14} = 12, \quad CK = \frac{168}{13}.$$

Z trójkąta prostokątnego  $ACK$  otrzymujemy

$$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{168}{13}\right)^2} = \frac{99}{13}.$$

Z podobieństwa trójkątów  $AOK$  i  $ABL$  wynika, że:  $\frac{AO}{AK} = \frac{AB}{AL}$ , a w konsekwencji

$$AO = \frac{AB \cdot AK}{AL} = \frac{13 \cdot \frac{99}{13}}{12} = \frac{33}{4}.$$