

# Bieg po Indeks – edycja XXVIII

## Etap I

### Matematyka – zestaw 2 z rozwiązaniami

**Zadanie 1.** Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie :

$$x^4 - 2kx^2 + k + 6 = 0$$

ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty?

**Szkic rozwiązania:**

Dokonując podstawienia  $x^2 = t$  otrzymamy równanie kwadratowe:  $f(t) = t^2 - 2kt + k + 6 = 0$ , którego wyróżnikiem jest  $\Delta = 4(k^2 - k - 6)$ .

Aby spełniony był warunek zadania, otrzymane równanie kwadratowe powinno mieć przynajmniej jeden pierwiastek nieujemny. Wystarczy zatem spełnienie jednego z warunków:

a)  $f(0) < 0$  (równanie ma wtedy dwa pierwiastki, z których jeden jest dodatni, a drugi ujemny).

Warunek zachodzi, gdy  $k + 6 < 0$ , czyli  $k < -6$ .

b)  $f(0) = 0$  (równanie ma wtedy co najmniej jeden pierwiastek, wśród nich  $t = 0$ ),

Warunek zachodzi, gdy  $k + 6 = 0$ , czyli  $k = -6$ .

c)  $\begin{cases} f(0) > 0, \\ x_w > 0, \\ \Delta \geq 0. \end{cases}$  (równanie ma co najmniej jeden pierwiastek – wszystkie pierwiastki dodatnie).

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ x_w > 0, \\ \Delta \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 6 > 0, \\ k > 0, \\ k^2 - k - 6 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -6, \\ k > 0, \\ k \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty). \end{cases} \Leftrightarrow k \in \langle 3; +\infty \rangle.$$

Uwzględniając wszystkie warunki:  $k \in (-\infty; -6) \cup \langle 3; +\infty \rangle$ .

**Zadanie 2.** Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny, którego wyrazy spełniają warunki :

$$a_1 a_5 = 96, \quad a_2 + a_6 = 38.$$

Obliczyć sumę trzydziestu najmniejszych wyrazów tego ciągu podzielnych przez 3.

**Szkic rozwiązania:**

Ponieważ  $a_2 = a_1 + r$ ,  $a_5 = a_1 + 4r$  oraz  $a_6 = a_1 + 5r$ , to warunki dotyczące ciągu, można zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{cases} a_1(a_1 + 4r) = 96, \\ (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 38. \end{cases}$$

Układ ten, przy założeniu, że ciąg jest rosnący, spełnia jedynie para:  $\begin{cases} a_1 = 4, \\ r = 5. \end{cases}$

Wypiszmy kilka początkowych wyrazów ciągu:

$$4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, \dots$$

Nietrudno zauważyć, że wyrazy ciągu podzielne przez 3 tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 9 i różnicy 15.

$$\text{Stąd } S_{30} = \frac{9 + (9 + 29 \cdot 15)}{2} \cdot 30 = 6795.$$

**Zadanie 3.** Wiadomo, że  $x + y = 5$  oraz  $x^2 + y^2 = 15$ . Obliczyć wartość wyrażeń:  $A = xy$ ,  $B = x^3 + y^3$ ,  $C = x^4 + y^4$ .

**Szkic rozwiązania:**

Ze wzoru  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  otrzymujemy  $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$  i tym samym:

$$A = xy = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)] = \frac{1}{2}(25 - 15) = 5.$$

Ponieważ  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ , to

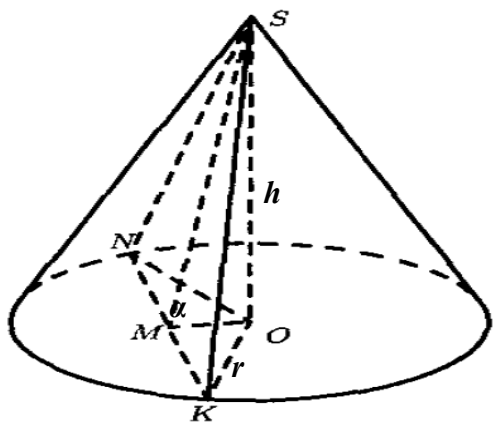
$$B = x^3 + y^3 = (x + y)^3 - (3x^2y + 3xy^2) = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 125 - 15 \cdot 5 = 50.$$

Podobnie  $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$  i tym samym

$$C = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 225 - 50 = 175.$$

**Zadanie 4.** Płaszczyzna przekroju stożka przechodząca przez jego wierzchołek  $S$ , tworzy z płaszczyzną podstawy stożka kąt  $\alpha = 60^\circ$ . Obliczyć pole przekroju stożka, jeżeli promień podstawy stożka ma długość  $r = 5$ , a wysokość stożka ma długość  $h = 3\sqrt{3}$ .

**Szkic rozwiązania:**



Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.

Przekrój stożka jest trójkątem równoramiennym, w którym podstawą jest odcinek  $KN$ , a wysokością – odcinek  $MS$ .

Z trójkąta prostokątnego  $MOS$  otrzymujemy:

$$\frac{h}{MS} = \sin \alpha \quad \text{skąd} \quad MS = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.$$

Podobnie

$$\frac{h}{MO} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{skąd} \quad MO = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3.$$

W trójkącie prostokątnym  $MOK$  mamy:

$$MK^2 + MO^2 = r^2 \quad \text{i tym samym} \quad MK = \sqrt{r^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

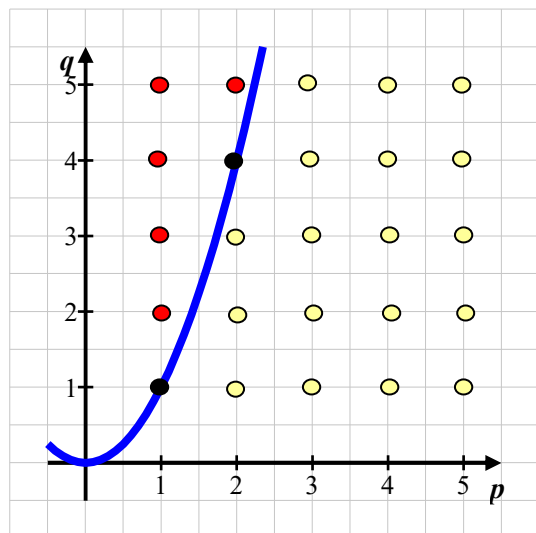
Pole przekroju:

$$P = 2P_{MKS} = MK \cdot MS = 4 \cdot 6 = 24.$$

**Zadanie 5.** Ze zbioru liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  wybieramy losowo i niezależnie dwie liczby  $p$  i  $q$ , a następnie tworzymy równanie  $x^2 + 2px + q = 0$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie to:

- ma jeden (podwójny) pierwiastek rzeczywisty,
- nie ma pierwiastków rzeczywistych,
- ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

**Szkic rozwiązania:**



Wyniki losowań można przedstawić w postaci par  $(p, q)$ , które w interpretacji geometrycznej tworzą zbiór punktów kratowych przedstawionych na rysunku obok.

$$n(\Omega) = 25.$$

Liczba pierwiastków równania zależy od wielkości

$$\Delta = 4p^2 - 4q.$$

Równanie ma jeden pierwiastek, gdy  $\Delta = 0$ . Sytuacji tej odpowiadają punkty leżące na paraboli  $q = p^2$ .

$$P(A) = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdy  $\Delta < 0$ . Sytuacji tej odpowiadają punkty leżące powyżej paraboli  $q = p^2$ .

$$P(B) = \frac{5}{25} = 0,2.$$

Równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy  $\Delta > 0$ . Sytuacji tej odpowiadają punkty leżące poniżej paraboli  $q = p^2$ .

$$P(C) = \frac{18}{25} = 0,72.$$